Μαθημα 26ο 18/11/2018

Διαφ. Εξ.

$y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$

Ψαχνω για λυσεις με συνοριακες τιμες

$y(a) = k$

$y(b) = \lambda$

Προβλημα συνοριακων τιμων

παραδειγμα 1

$y'' + y = x$, $x \in [0, \pi)$

α) $y(0) = 2$, $y(\pi) = 1$

ΒΣΛ της ομογενους θα ειναι το $\{\cos x, \sin x\}$

μερικη λυση $y_\mu = x$

Αρα γενικη λυση: $y(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + x$

$y(0) = 2 \Rightarrow C_1 \cdot 1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2$

$y(\pi) = 1 \Rightarrow -C_1 = \pi \Rightarrow C_1 = -\pi$

Δεν ειναι λαθος, αλλα πρεπει να βγαλω καποιο συμπερασμα

Δεν υπαρχουν λυσεις του προβληματος συνοριακων τιμων

παραδειγμα 2

$y'' + y = x$, $x \in [0, \pi)$

$y(0) = 2$, $y(\pi) = \pi - 2$

ΒΣΛ της ομογενους $\{\cos x, \sin x\}$, $y_\mu = x$

Γενικη λυση : $y(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + x$

$y(0) = 2 \Rightarrow C_1 \cdot 1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2$

$y(\pi) = \pi - 2 \Rightarrow \pi - 2 = \pi - 2$ (ταυτοτητα) τι μου λεει

Προσδιοριζω το $C_1 = 2$ αλλα το C_2 ελευθερο, μπορει να παρει οποιαδηποτε τιμη

$y_\lambda(x) = \lambda \cdot \sin x$

Παραδειγμα

$y'' + y = x \quad , \quad x \in [0, \pi/2)$

$y(0) = 2 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

ΒΣΛ της ομογενους $\{\cos x, \sin x\}$, $y_\mu(x) = x$

Γενικη λυση $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$

$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2$

$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 + \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow c_2 = -1 - \frac{\pi}{2}$

Αρα εχω μοναδικη λυση (εφοσον εχω ενα ζευγαρι (c_1, c_2))

$y(x) = 2\cos x + \left(-1 - \frac{\pi}{2}\right) \sin x + x$

(*) $y'' = f(x, y, y') \quad , \quad x \in [a, b]$ διαχωρισμενες συνοριακες συνθηκες

(S) $(p y')' + q y = 0$ (*)

$p(x) > 0 \quad , \quad p' \in C[a, b] \quad , \quad q \in [a, b]$

$$(C) \begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

(*) για καποια q εχω λυση για καποια αλλα οχι

$(p y')' + (q + \lambda r) y = 0$ με $r(x) > 0$, $r(x) \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

για ποιες τιμες του r, λ εχει λυση?

Προταση

Το ΠΣΤ (S)-(C) εχει απειρες ιδιοτιμες. Οι ιδιοτιμες αυτες ειναι οροι ακολουθιας $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ με $\lambda_n \to +\infty$

Θεώρημα 31

Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών (S)-(C).

1) αν λ_0 ιδιοτιμή (S)-(C) του y_0 μια ιδιοσυνάρτηση της,
τότε όλες οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στο πρόβλημα είναι
οι $c y_0$, $c \in \mathbb{R}^*$.

2) Αν y_1, y_2 ιδιοσυναρτήσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές
$(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ τότε

$$\int_a^b r(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx = 0$$

απόδειξη

Ας είναι y_1, y_2 ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2
με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ είναι

$$\begin{array}{l|l} (p y_1')' + (q + \lambda_1 r) y_1 = 0 & y_2 \\ (p y_2')' + (q + \lambda_2 r) y_2 = 0 & y_1 \end{array}$$

αφαιρώ

$$y_2 (p y_1')' - y_1 (p y_2')' + y_1 y_2 r (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

$$y_2 (p y_1')' - y_1 (p y_2')' = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 r$$

παράδειγμα

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

χαρακτ. πολ.

$$x^2 + \lambda = 0$$

Περιπτώσεις

$\lambda < 0$ τότε $\lambda_1 = \sqrt{-\lambda}$, $\lambda_2 = -\sqrt{-\lambda}$

ΒΣΛ $\{e^{-\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\}$

$c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} = y(x)$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$y'(x) = c_1 (\sqrt{-\lambda}) e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 (-\sqrt{-\lambda}) e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$

$y'(\pi) = 0 \quad c_1 = c_2$ αδύνατο

όχι ιδιοδιαν.

• $\lambda = 0 \quad 1, x$

$y(x) = c_1 + c_2 x$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ | Αδύνατο

$y'(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

• $\lambda > 0$

ΒΣΛ $\{\cos(\sqrt{\lambda}\, x), \sin(\sqrt{\lambda}\, x)\}$

$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$

αν επαιρνα $2\nu - 1$ τότε το ν θα ηταν απο $\nu \geq 1$.

$y(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

$y'(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, \pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, \pi = (2\nu+1) \frac{\pi}{2} \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$

$\lambda_\nu = \left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2, \quad \nu = 0, 1, \ldots$

$\left\{ y_\nu = \cos\left(\frac{(2\nu+1)\pi\, x}{2}\right), \quad \nu = 0, 1, \ldots, \quad x \in [0, \pi] \right\}$